

# ITERACYJNA SYNTEZA KONFIGURACJI PRZESTRZENNYCH SZKIELETÓW Z WYKORZYSTANIEM WIRTUALNEGO POTRZĄSANIA

Zenon Rychter

Wydział Architektury, Politechnika Białostocka, ul. O. Sosnowskiego 11, 15-893 Białystok  
E-mail: z.rychter@pb.edu.pl

## ITERATIVE LAYOUT SYNTHESIS OF SPACE FRAMES WITH VIRTUAL SHAKING

### Abstract

The paper deals with a simple, visual, interactive, iterative procedure of spatial layout synthesis of rigid skeletal structures. The procedure consists in successive approximations, which repeat cycles of testing and growth of an initial design. The testing is based on virtual shaking, which reveals possible unconstrained moves of the structure. The moves are eliminated one by one in growth steps by adding members in the direction of the moves. Free vibration analysis is used for virtual shaking. The procedure can be applied to problems of arbitrary complexity. The paper illustrates the procedure by synthesizing rigid spatial layouts of thin, straight rods supporting a slab. The slab can represent a roof or a floor in a multi-story building. The paper is addressed to architects with an interest in interactive, iterative, computer-aided, visual, conceptual layout design.

### Streszczenie

Przedmiotem pracy jest prosta, wizualna, interaktywna, iteracyjna procedura wirtualnej syntezy sztywnych, przestrzennych ustrojów szkieletowych. Jest to metoda kolejnych przybliżeń, polegająca na powtarzaniu cykli testowania i rozbudowy konstrukcji. Testowanie polega na wirtualnym potrząsaniu projektowanym układem w celu wykrycia ruchów wykonywanych bez oporu. Rozbudowa polega na dodawaniu prętów w kierunku tych ruchów. Algorytmem wirtualnego potrząsania jest algorytm analizy drgań własnych. Procedurę można zastosować do problemów dowolnie złożonych. W pracy procedurę pokazano na przykładzie syntezy przestrzennej konfiguracji cienkich, prostych prętów podpierających płytę. Jest to zadanie podparcia przekrycia lub połączenia płyt stropowych sąsiednich kondygnacji szkieletowej konstrukcji wielopiętrowej. Praca jest skierowana do architektów zainteresowanych interaktywnym, iteracyjnym projektowaniem koncepcyjnym konfiguracji ustrojów szkieletowych z użyciem technik komputerowych.

Keywords: architectural design, computer-aided design, layout synthesis, skeletal structures, free vibrations

Słowa kluczowe: projektowanie architektoniczne, projektowanie wspomagane komputerowo, synteza konfiguracji, konstrukcje szkieletowe, drgania własne

## WPROWADZENIE

Konstrukcja budowli nie może być mechanizmem dającym się poruszać bez oporu. Konstrukcja musi być sprężyste sztywna przestrzennie, stawiać opór obciążeniom przyłożonym w dowolnym miejscu i działającym w dowolnym kierunku. Układ, konfigurację takiej konstrukcji można zaprojektować eksperymen-

talnie, fizycznie, na rzeczywistym obiekcie lub jego pomniejszonym modelu, metodą wielu naprzemiennych kroków testowania i rozbudowy. Testowanie polega na wszechstronnym potrząsaniu, wykrywającym ewentualne ruchy wykonywane bez oporu. Rozbudowa polega na dodawaniu elementów eliminujących ruchy nie-

stawiające oporu. Od tysięcy lat konstruowano metodą prób (budowla) i błędów (katastrofa budowlana)<sup>1</sup>.

Fizyczny proces testowania (potrzęsania) i rozbudowy można realizować wirtualnie, technikami komputerowymi. Rozbudowę można wykonać programami modelowania geometrycznego zawartymi w pakietach CAD<sup>2</sup>. Metodą matematyczną „potrzęsającą” matematycznym modelem konstrukcji jest analiza drgań własnych<sup>3</sup>, zwanych też drganiami naturalnymi, swobodnymi lub niewymuszonymi. Wydajne algorytmy numeryczne realizujące analizę drgań własnych są standardową częścią programów metody elementów skończonych<sup>4,5</sup>. Analiza drgań własnych może być ważnym narzędziem w projektowaniu wstępnym, koncepcyjnym, kiedy projekt konstrukcji jest niekompletny, być może mechanicznie niepoprawny (brak właściwych powiązań) i podlega dużym zmianom jakościowym. Wydaje się jednak, że ten potencjał analizy drgań własnych jako narzędzia w procesie syntezy konstrukcji budowlanych nie jest wykorzystywany.<sup>6,7</sup> Dominującym podejściem jest bowiem statyka, analiza równowagi sił, a nie analiza ruchów konstrukcji – bardziej naturalna, ale trudniejsza obliczeniowo.

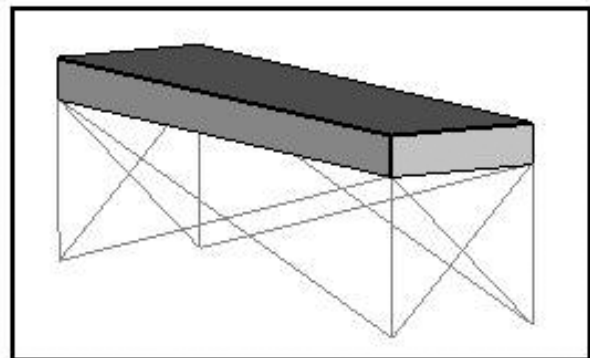
Analiza drgań własnych jest metodą odporną, da się zawsze wykonać - dla kompletnych, poprawnych konstrukcji i niekompletnych mechanizmów, zaczątków konstrukcji. Metoda jest bardzo szybka, co sprzyja wydajnej pracy interaktywnej. Analiza drgań własnych jest bardzo prosta z punktu widzenia użytkownika. Dane wejściowe to tylko geometria konstrukcji i mechaniczne cechy materiałów (masa i moduły sprężystości). Zbędne są jakiegokolwiek obciążenia. Dane wyjściowe to spektrum, uporządkowany ciąg par własnych (częstość drgań, forma drgań), ciąg posortowany rosnąco ze względu na częstości. Formy drgań własnych to możliwe, naturalne dla danej konstrukcji ruchy. Oglądając animacje drgań własnych, projektant może łatwo ocenić, czy badany układ porusza się bez oporu, jak niesztwywny mechanizm – wymagając korekty - czy też jest odkształcającą się sprężystością, a więc zdolną do pracy konstrukcją. Częstości poszczególnych drgań własnych charakteryzują sztywność konstrukcji, gdy wykonuje ona drganie o danej formie. Wyższe częstości oznaczają większą sztywność. Częstości zerowe oznaczają brak sztywności, a więc zachowania właści-

we dla mechanizmów – jest to liczbowy sygnał, że projektowany układ wymaga istotnej zmiany konfiguracji.

Praca pokazuje metodę wirtualnego potrząsania na przykładzie syntezy przestrzennej konfiguracji cienkich, prostych prętów podpierających prostokątną płytę. Zadanie to może reprezentować problem zaprojektowania przestrzennego, sztywnego połączenia płaskiego przekrycia z fundamentami, albo połączenia płyt stropowych sąsiednich kondygnacji szkieletowego budynku wielopiętrowego. W kolejnych częściach pracy przedstawiono: zadanie syntezy, metodę syntezy szkieletów przez wirtualne potrząsanie i rozbudowę, model obliczeniowy metody elementów skończonych, jedną z wielu możliwych ścieżek procesu syntezy i jej wynik (konfigurację prętów), konfiguracje alternatywne oraz podsumowanie.

Praca jest adresowana do projektantów-architektów zainteresowanych zastosowaniami narzędzi projektowania wspomagane komputerowo w projektowaniu koncepcyjnym.

## 1. ZADANIE SYNTEZY KONFIGURACJI



**Ryc. 1.** Płyta i możliwe pręty podporowe: cztery słupki pionowe i/ lub osiem ukośnych krzyżulców. Pręty zamocowane na dole do podłoża. Rys. autor

Rysunek 1 przedstawia przykładowe zadanie syntezy konfiguracji. Pozioma prostopadłościenna płyta ma zostać zamocowana w poziomym podłożu, poniżej płyty, za pomocą możliwie małej liczby prostych, cienkich prętów. Pręty mogą być pionowymi słupkami lub ukośnymi krzyżulcami. Górne końce prętów przytrzymują dolne naroża płyty. Słupki mogą wystąpić w czte-

<sup>1</sup> M. Salvadori, *Why buildings stand up*, W.W. Norton & Company, New York 1990, s. 19.

<sup>2</sup> *Computer-aided design*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Computer-aided\\_design](http://en.wikipedia.org/wiki/Computer-aided_design) [dostęp: 04-06-2014]

<sup>3</sup> *Vibration*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Vibration> [dostęp: 04-06-2014].

<sup>4</sup> *Finite element method*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_element\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method) [dostęp: 04-06-2014].

<sup>5</sup> *Calculus*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Calculus> [dostęp: 04-06-2014].

<sup>6</sup> A. Allen, W. Zalewski, *Form and forces. Designing efficient expressive structures*, Wiley, Hoboken NJ 2010.

<sup>7</sup> M. Salvadori, *Why buildings stand up*, W.W. Norton & Company, New York 1990.

rech miejscach. Ich liczba może wynosić 0,1,2,3,4. Krzyżulce mogą wystąpić w ośmiu miejscach. Ich liczba może wynosić 0,1,2,3,4,5,6,7,8. Płyta jest zbudowana ze sprężystego materiału, stawiającego opór przy odkształcaniu. Płyta jest na tyle gruba, że stawia opór obciążeniom dowolnie rozłożonym i dowolnie skierowanym. Materiał prętów jest sprężysty. Pręty są proste i na tyle cienkie – w stosunku do swojej długości i do grubości płyty – że mogą przenosić tylko siły podłużne: rozciąganie i ściskanie. Pręty są na tyle grube, że przy ścisnaniu nie wybaczają się. Liczba prętów, ich orientacja (pionowa, ukośna) i położenie mają być ustalone w procesie analizy i syntezy. Układ płyta/pręty/podłoże ma stawiać opór obciążeniom przestrzennym, trójwymiarowym. W praktyce architektonicznej układ płyta/pręty/podłoże może być przekryciem jednopiętrowym albo połączeniem płyty stropowej wyższej kondygnacji z płytą poniżej budowli wielopiętrowej.

## 2. METODA SYNTEZY – POTRZĄSANIE I ROZBUDOWA

### 2.1. Eksperyment fizyczny

Postawione zadanie można rozwiązać z użyciem eksperymentu fizycznego. Do niepodpartej płyty należy dodawać po jednym kolejne pręty podpierające, sprawdzając przez potrząsanie w różnych kierunkach sztywność układu. Jeśli układ porusza się bez oporu, należy dodać kolejny pręt podporowy w kierunku niepożądanego ruchu. Jeśli układ stawia istotny opór, sprężynuje przy wszechstronnym potrząsaniu, zadanie zostało rozwiązane, została znaleziona sztywna konstrukcja.

### 2.2. Eksperyment wirtualny

Metoda wirtualna naśladuje metodę eksperymentu fizycznego. Algorytm analizy drgań własnych<sup>8</sup> przeszukuje przestrzeń możliwych ruchów konstrukcji (wirtualne potrząsanie), poszukując ruchów własnych. Ruchy własne zwane są naturalnymi, swobodnymi lub niewymuszonymi, gdyż są to ruchy/drgania wykonywane po początkowym zaburzeniu formy (potrząśnięciu) bez dalszej obecności sił zewnętrznych, wymuszających postać ruchu. Ruchy własne można traktować jak 'klocki', z których można zbudować dowolnie złożony ruch konstrukcji.

Algorytm analizy drgań własnych znajduje pary własne (forma ruchu, częstość drgań) posortowane wedle częstości, od częstości najniższych do najwyższych. Układy o zerowych częstościach ruchów własnych nie są konstrukcjami, ale mechanizmami. Zerowa

częstość ruchu oznacza, że układ nie wykonuje drgań. Poruszony z położenia początkowego, układ nigdy do niego nie powraca – jak nienapięta struna. Poprawne, sztywne układy mają niezerową najniższą częstość drgań. Wizualnie układy nieszttywne poruszają się bez deformacji ich części (płyty i prętów). Układy sztywne nie dają się poruszyć bez zdeformowania ich części. Animacja ruchów własnych pokazuje, czy nie ma deformacji (brak sztywności, potrzeba uzupełnienia konfiguracji), czy jest deformacja (konstrukcja sztywna).

Spektrum ruchów własnych sprężystego układu ciągłego jest nieskończone; nawet najprostsze ciało ma nieskończoną liczbę różnych zachowań własnych. Algorytmy numeryczne analizy drgań własnych obliczają zadaną przez użytkownika, skończoną część nieskończonego spektrum. W rozważanym zadaniu wystarczające okazuje się pierwsze siedem ruchów własnych. W bardziej złożonych projektach, układach mających więcej elementów, konieczne może być zbadanie większej części spektrum.

Algorytm analizy drgań własnych działa na liczbach rzeczywistych, niedokładnych. Z tego powodu nieszttywne, wykonywane bez oporu ruchy własne, których częstości winny być zerowe, mogą mieć niezerowe częstości w wynikach algorytmu. Animacja pokazuje, że są to faktycznie ruchy układu nieszttywnego. W spektrum częstości następuje gwałtowny skok wartości przy przejściu od ruchów wykonywanych bez oporu do ruchów, w których układ pracuje, deformuje się. W badanym przypadku ten skok to pięć rzędów wielkości ( $10^5$ ).

## 3. MODEL OBLICZENIOWY

Rozważane zadanie ma naturę jakościową – znalezienie sztywnej konfiguracji prętów podporowych. Zadanie jest natury zerowej, nieszttywnej-szttywnej. Nie rozważamy zagadnienia ilościowego, tj. układów sztywnych, różniących się stopniem sztywności. Aby konstrukcja mogła drgać, musi być sprężysta i obdarzona masą. Konkretnie wartości cech materiałowych oraz wymiarów geometrycznych (płyta, pręty, skala i proporcje układu) nie są istotne. Czyni to wynik poszukiwań sztywnych konfiguracji ogólniejszym. Otrzymane konstrukcje można przeskalowywać i zmieniać ich proporcje, mając pewność, że są to układy sztywne. Można też jeden materiał sprężysty, obdarzony masą, zastąpić innym. Ta niezależność od konkretnych wartości parametrów jest zaletą we wstępnej, koncepcyjnej fazie poszukiwań projektowych. Przyjęte poniżej wartości parametrów są konkretne, umożliwia-

<sup>8</sup> *Vibration*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Vibration> [dostęp: 04-06-2014].

ją wykonanie obliczeń algorytmem analizy drgań własnych, ale nie są istotne dla uzyskanych wyników.

W obliczeniach zastosowano następujący układ jednostek:

[kG] – kilogram, jednostka siły;

[m] – metr, jednostka długości;

[s] – sekunda, jednostka czasu.

Obliczenia wykonano dla następujących danych.

Geometria:

długość płyty: 16 m,

szerokość płyty: 4 m,

wysokość płyty: 1 m,

odległość płyty od podłoża (wysokość pionowego słupka): 4 m.

Materiały – przyjęto najprostsze.

Płyta – typowa stal konstrukcyjna:

jednorodna (wszędzie taka sama);

izotropowa (we wszystkich kierunkach taka sama);

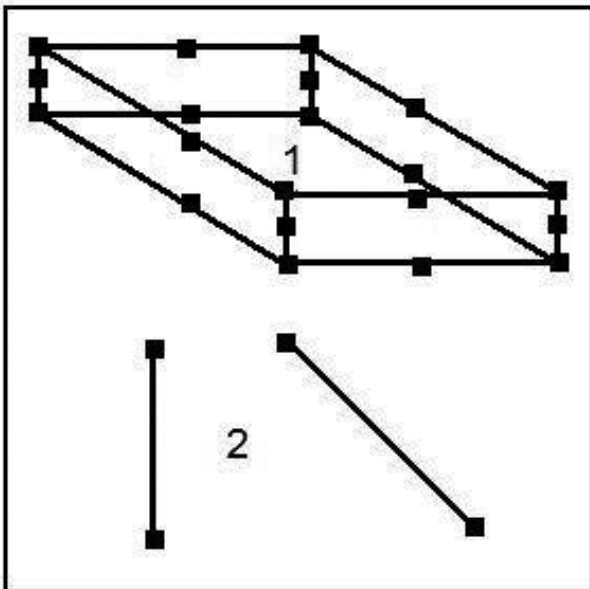
liniowo sprężysta (podlegająca prawu Hooke'a);

moduł sprężystości Younga (sztywność na ściskanie/rozciąganie):  $2.1 \cdot 10^{10}$  kG/m<sup>2</sup>;

współczynnik Poissona: 0,3;

gęstość masy:  $7.8 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

Pręty – liniowo sprężyste sprężyny; sztywność:  $10^{10}$  kG/m.



**Ryc. 2.** Model obliczeniowy w metodzie elementów skończonych: (1) – element przestrzenny 20-węzłowy tworzący płytę, (2) – elementy prętowe kratowe 2-węzłowe tworzące podparcia płyty. Rys. autor

Obliczenia drgań własnych wykonano metodą elementów skończonych<sup>9</sup>. Korzystano z programu CALCULIX<sup>10</sup>, modułu *frequency analysis*. W metodzie elementów skończonych konstrukcja dzielona jest na małe klocki obliczeniowe, o prostym zachowaniu – elementy skończone. Podział na wiele drobnych klocków umożliwia dowolnie dokładne modelowanie złożonych zachowań. Zastosowano elementy skończone pokazane na rysunku 2.

Do budowy płyty użyto przestrzennej 'cegły' prostopadłościennej o 20 węzłach, znajdujących się w narożach i środkach krawędzi cegły. Węzły to miejsca, w których obliczane są przemieszczenia. Cegła 20-węzłowa jest bardzo dokładna, gdyż już pojedyncza cegła może się przestrzennie rozciągać, ścisnąć, skręcać, ścinać i zginać. Dla potrzeb tej pracy wystarczyło całą płytę potraktować jako jedną cegłę 20-węzłową, gdyż nie interesują nas finezyjne, lokalne deformacje płyty. Do modelowania prętów zastosowano elementy sprężynowe 2-węzłowe, z węzłami na końcach (znane też jako elementy kratowe). Elementy te pracują tylko na podłużne ściskanie/rozciąganie; nie pracują na zginanie i skręcanie. Każdy słupek i krzyżulec jest jednym elementem sprężynowym. Podłużny podział słupków i krzyżulec na większą liczbę sprężyn jest niecelowy.

Połączenia między węzłami płyty, prętów i podłoża są przegubowe. Są to przeguby kuliste. Wykluczają one wzajemne przesunięcia połączonych elementów, ale nie ograniczają wzajemnych obrotów. Układ płyta/pręty/podłoże nie może uzyskać sztywności jako całość dzięki połączeniom węzłowym, gdyż są one nieszttywne. Jedyną drogą do sztywnej całości jest odpowiednia liczba prętów i właściwa ich konfiguracja. Przy sztywnych, uniemożliwiających wzajemne obroty węzłach wystarczyłby jeden pręt do sztywnego połączenia płyty z podłożem, co nie jest interesujące w tej pracy.

#### 4. PROCES SYNTEZY

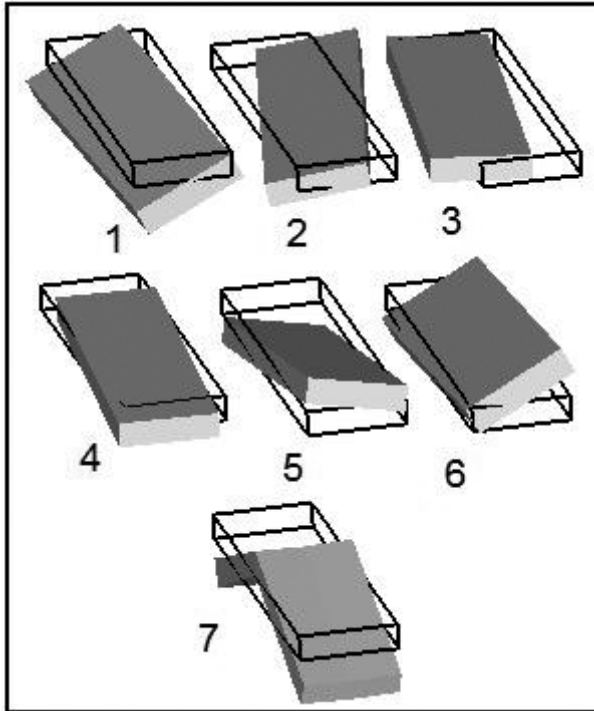
##### Krok 1: płyta swobodna

Rysunek 3 przedstawia pierwsze siedem ruchów własnych płyty niepodpartej. Częstości tych ruchów zawiera tabela 1. Ruch jest zmianą położenia. Do uchwycenia zmiany wystarczą dwa położenia. Położenie początkowe, nieporuszone pokazuje czarna ramka prostopadłościenna. Szara bryła to płyta poruszona. Ruchy (1-6) są zasadniczo różne wizualnie i pod względem częstości od ruchu (7). Ruchy (1-6) to

<sup>9</sup> *Finite element method*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_element\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method) [dostęp: 04-06-2014].

<sup>10</sup> *Calculix*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Calculix> [dostęp: 04-06-2014].

przesunięcia i obroty całej płyty, niezmieniające jej prostopadłościenną formę. Płyta nie ulega tu deformacji, nie sprężyna, nie stawia oporu. Przeciwnie, ruch (7) to sprężysta deformacja. Płyta tu pracuje, stawia opór deformacji.



**Ryc. 3.** Spektrum ruchów własnych płyty niepodpartej: 1-6 ruchy niesprężyste – ujawniają braki podparcia, 7 - pierwszy ruch sprężysty, deformacja. Czarny prostopadłocien – płyta nieporuszona. Kolor szary – płyta poruszona. Rys. autor

Częstość drgań ruchu (7) przewyższa  $10^5=100\ 000$  razy częstości ruchów (1-6) – zgrupowane w szarej strefie tabeli 1. Częstości (1-6) są więc praktycznie zerowe wobec (7) – ich niezerowe wartości wynikają z nieuniknionej niedokładności obliczeń na liczbach rzeczywistych. Ruchy o zerowych (i praktycznie zerowych) częstościach nie są drganiami – układ nigdy nie wraca do położenia początkowego. Czas powrotu, okres drgań – odwrotność częstości – jest nieskończony. Ruchy takie sygnalizują jakościowy deficyt konfiguracji układu, jego niezdolność do przeciwstawienia się obciążeniom zgodnym z danym ruchem.

Rozważana płyta niepodparta wykonuje bez oporu sześć ruchów (1-6). Ruchy te wyeliminujemy jeden po drugim, podpierając naroża płyty. Należy wybrać naroże, które w danym ruchu własnym mocno się przemieszcza. Naroże przednie lewe przemieszcza się pionowo w ruchach (1) i (5), poziomo poprzecznie w ruchach (2) i (3) oraz do przodu-tyłu w ruchu (4). Podpierając płytę, mamy do dyspozycji pionowe słupy i ukośne krzyżulce. Cienki pręt jest zdolny do samodzielnej pracy tylko wzdłuż siebie. Ruchy poprzeczne (prostopadłe lub ukośne) do osi pręta wymagają współpracy większej liczby prętów. W pierwszym kroku podpierania płyty zastosujemy słupek pionowy w narożu przednim lewym, które w ruchach (1) i (5) mocno się przemieszcza pionowo.

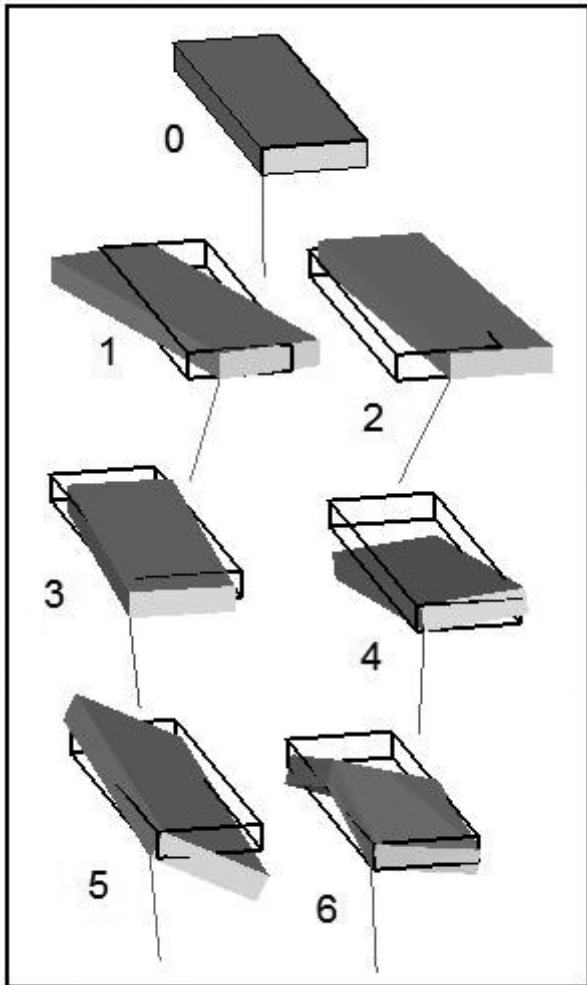
**Krok 2: płyta oparta na jednym słupku**

Rysunek 4 prezentuje pierwsze sześć ruchów własnych płyty podpartej na jednym słupku pionowym.

**Tab. 1.** Spektrum częstości ruchów własnych w zależności od liczby prętów podpierających płytę. Deficyt prętów. Sztwywność układu. Szary obszar częstości – ruchy niesprężyste; pozostały obszar – ruchy sprężyste. Częstości ruchów niesprężystych praktycznie zerowe wobec sprężystych -  $10^5$  razy mniejsze

Liczba prętów/ rycina	Numer ruchu własnego							Deficyt prętów	Sztwywność układu
	1	2	3	4	5	6	7		
	Częstość [cykle/sek] · 10 <sup>5</sup>								
0/ryc.3	0.	0.	3.	5.	10.	21.	77. · 10 <sup>5</sup>	6	deficyt
1/ryc.4	0.	3.	5.	7.	21.	56. · 10 <sup>5</sup>		5	deficyt
2/ryc.5	0.	5.	6.	21.	56. · 10 <sup>5</sup>			4	deficyt
3/ryc.6	0.	6.	21.	54. · 10 <sup>5</sup>				3	deficyt
4/ryc.7	0.	7.	51. · 10 <sup>5</sup>					2	deficyt
5/ryc.8	0.	27. · 10 <sup>5</sup>						1	deficyt
6/ryc.9	18. · 10 <sup>5</sup>							0	sztwywny

Źródło: oprac. autora



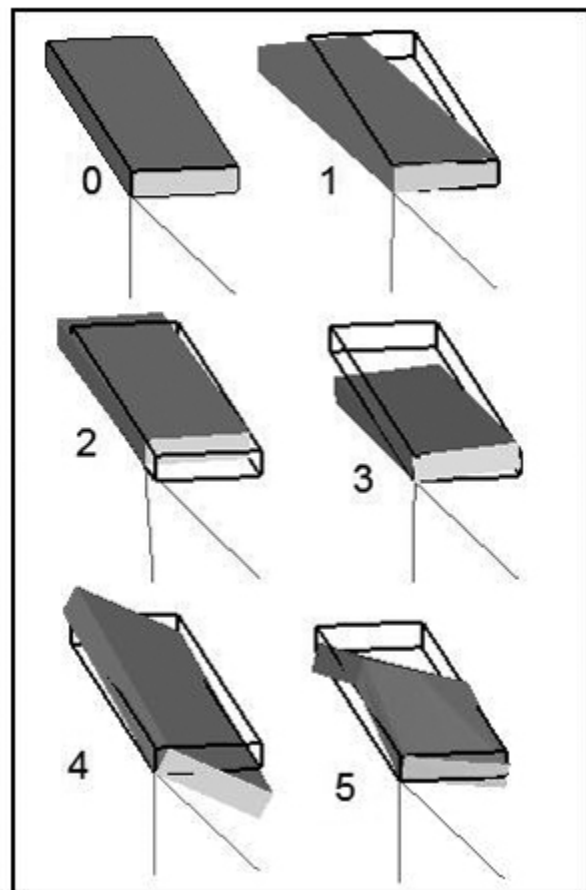
**Ryc. 4.** Spektrum ruchów własnych płyty opartej na jednym pręcie: 0 – badany układ, 1-5 ruchy niesprężyste – ujawniają braki podparcia, 6 - pierwszy ruch sprężysty. Rys. autor

Częstości tych ruchów pokazuje tabela 1. Zerowych (praktycznie zerowych) częstości ruchów jest pięć (szara strefa, tab. 1). Częstość ruchu (6) jest olbrzymia w stosunku do częstości ruchów (1-5). Zatem (6) to ruch, w którym konstrukcja deformuje się sprężysto, z oporem. Ruchy (1-5) są wykonywane bez oporu, pokazując niedostatki podparcia płyty. W żadnym ruchu (1-6) podparte słupem naroże płyty nie przemieszcza się pionowo. Jeden pręt odebrał więc płycie jeden stopień swobody<sup>11</sup>.

Ruchy (1-5) sugerują sensowne położenia drugiego pręta. Ruchy (1-2) zawierają przesunięcie poziome krawędzi czołowej. Ruchy te ograniczyłby krzyżulec, pochylony w lewo ( $\backslash$ ) lub w prawo ( $/$ ), leżący w płaszczyźnie pionowej zawierającej krawędź. Ruch (3) to głównie przesunięcie poziome wzdłuż płyty. Ruch

ten ograniczyłby krzyżulec (nachylenia  $/$  lub  $\backslash$ ) w płaszczyźnie pionowej zawierającej krawędź podłużną (dwie możliwe krawędzie). W ruchu (4) pionowo przemieszcza się krawędź tylna. Krawędź tę należałoby podeprzeć słupkiem pionowym, w jednym lub drugim narożu. W ruchu (5) pionowo przemieszcza się prawa krawędź podłużna, co sugeruje zastosowanie pionowego słupka na jednym lub drugim końcu tej krawędzi. Wszystkie wymienione położenia drugiego pręta ograniczają jakieś przemieszczenie, więc mają sens konstrukcyjny. Projektant może wybrać dowolny wariant. W dalszych rozważaniach zastosowano krzyżulec o nachyleniu ( $\backslash$ ), leżący w płaszczyźnie czołowej, łączący się u góry ze słupkiem. Te dwa pręty tworzą pionowy trójkąt, formę niezwykle istotną w tworzeniu sztywnych układów prętowych.

### Krok 3: płyta oparta na jednym słupku i jednym krzyżulcu



**Ryc. 5.** Spektrum ruchów własnych płyty opartej na dwóch prętach: 0 – badany układ, 1-4 ruchy niesprężyste – ujawniają braki podparcia, 5 - pierwszy ruch sprężysty. Rys. autor

<sup>11</sup> Degrees of freedom, [http://en.wikipedia.org/wiki/Degrees\\_of\\_freedom\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Degrees_of_freedom_(mechanics)) [dostęp: 04-06-2014].

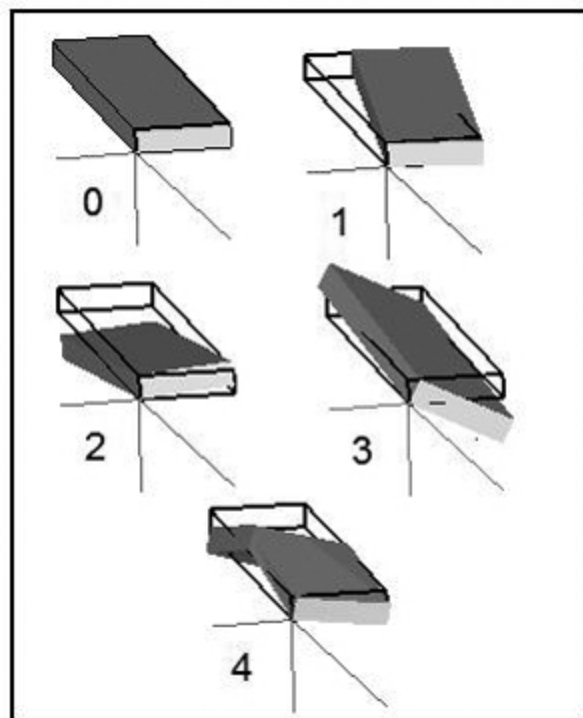
Rysunek 5 pokazuje pierwsze pięć ruchów własnych płyty podpartej na dwóch prętach – jednym słupku i jednym krzyżulcu, tworzących trójkąt. Częstości tych ruchów zawiera tabela 1. Tylko cztery pierwsze ruchy (1-4) są wykonywane bez oporu, z zerowymi częstościami, sugerując braki podparcia. Dwa zastosowane dotychczas pręty podporowe ograniczyły liczbę ruchów płyty swobodnej z sześciu do czterech, a więc oba pręty zostały zastosowane poprawnie. Kolejny pręt należy ustawić tak, by ograniczyć jedno z dużych przemieszczeń w ruchach własnych (1-4). Według ruchu (1) należałoby użyć krzyżulca (orientacje / lub \) w płaszczyźnie pionowej na tylnej krawędzi poziomej, która przesuwa się wzdłuż siebie. Ruch (2) sugeruje użycie krzyżulca (orientacje / lub \) w płaszczyźnie pionowej jednej lub drugiej krawędzi podłużnej, które przesuwały się wzdłuż siebie. Ruch (3) podpowiada zastosowanie słupka pionowego na jednym lub drugim końcu tylnej krawędzi, która porusza się pionowo. Ruch (4) sugeruje użycie słupka pionowego na jednym lub drugim końcu prawej krawędzi podłużnej, która przemieszcza się w pionie. Spośród wymienionych możliwości wybrano krzyżulec w płaszczyźnie lewej krawędzi podłużnej, łączący się u góry z dwoma już dodanymi prętami. Tworzy to trójkątną piramidę, formę podstawową w sztywnych przestrzennych konstrukcjach prętowych. Zauważmy, że płaski trójkąt podporowy na ryc. 5 jest sztywny w swojej płaszczyźnie; w żadnym z ruchów (1-5) wierzchołek trójkąta nie porusza się w płaszczyźnie trójkąta. Zgodnie z ruchem (2) płaski trójkąt nie jest sztywny w kierunku poprzecznym do płaszczyzny trójkąta. Dodanie do trójkąta krzyżulca w płaszczyźnie poprzecznej tak, by powstała trójkątna piramida, winno wyeliminować ten brak sztywności.

#### Krok 4: płyta oparta na jednym słupku i dwóch krzyżulcach

Rysunek 6 pokazuje pierwsze cztery ruchy własne płyty opartej na trzech prętach, tworzących trójkątną piramidę. Tab. 1 przedstawia częstości tych ruchów. Układ tak oparty ma tylko trzy ruchy (1-3) o zerowych częstościach, wykazujące braki podparcia. Dowodzi to, że trójkątna piramida odebrała płycie niepodpartej, o sześciu ruchach swobodnych, trzy stopnie swobody. Ruchy (1-4) pokazują, że wierzchołek piramidy nie przemieszcza się w żadną stronę. Punkt zamocowany do wierzchołka piramidy trójkątnej traci wszelkie możliwości. Prętowa piramida trójkątna jest z tego powodu podstawowym 'prefabrykatem' do budowy sztywnych konstrukcji przestrzennych.

Ruchy swobodne (1-3) wskazują na możliwe pozycje czwartego pręta podporowego. Według ruchu (1) winien to być krzyżulec w płaszczyźnie krawędzi tylnej,

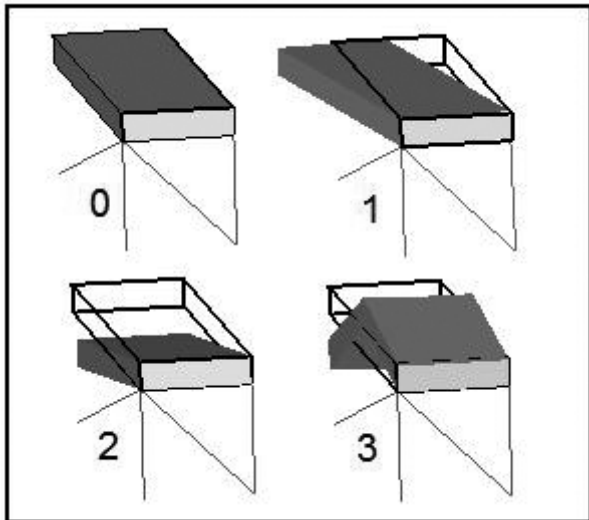
która przesuwa się wzdłuż siebie. Zgodnie z ruchem (2) mógłby to być słupek na tylnej krawędzi, która przemieszcza się pionowo. Według ruchu (3) winien to być słupek na prawej krawędzi podłużnej, która przesuwa się w pionie. Z tych równoprawnych możliwości wybrano słupek pionowy, podpierający prawy narożnik czołowy.



Ryc. 6. Spektrum ruchów własnych płyty opartej na trzech prętach: 0 – badany układ, 1-3 ruchy niesprężyste – ujawniają braki podparcia, 4 - pierwszy ruch sprężysty. Rys. autor

#### Krok 5: płyta oparta na dwóch słupkach i dwóch krzyżulcach

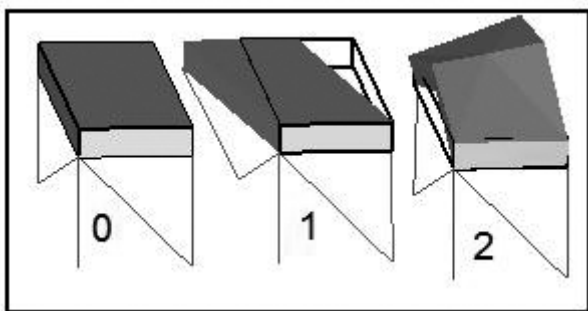
Rysunek 7 przedstawia pierwsze trzy ruchy własne płyty opartej na czterech prętach – dwóch słupkach i dwóch krzyżulcach. Częstości tych ruchów są zawarte w tabeli 1. Tylko dwa ruchy własne (1-2) są wykonywane bez oporu. Oznacza to, że cztery pręty podporowe zostały użyte prawidłowo – odebrały one płycie swobodnej cztery stopnie swobody. Pozostałe dwa ruchy wykonywane bez oporu sugerują sposób umieszczenia piątego pręta podporowego. Według ruchu (1) pręt ten winien być krzyżulcem umieszczonym w płaszczyźnie pionowej zawierającej tylną krawędź; krawędź ta porusza się poziomo, wzdłuż siebie. Zgodnie z ruchem (2) krawędź ta porusza się pionowo, wymaga więc podparcia słupkiem, na jednym lub drugim końcu. Do dalszych rozważań wybrano pionowy słupek na lewym końcu tylnej krawędzi płyty.



**Ryc. 7.** Spektrum ruchów własnych płyty opartej na czterech prętach: 0 – badany układ, 1-2 -ruchy niesprężyste – ujawniają braki podparcia, 3 - pierwszy ruch sprężysty. Rys. autor

#### Krok 6: płyta oparta na trzech słupkach i dwóch krzyżulcach

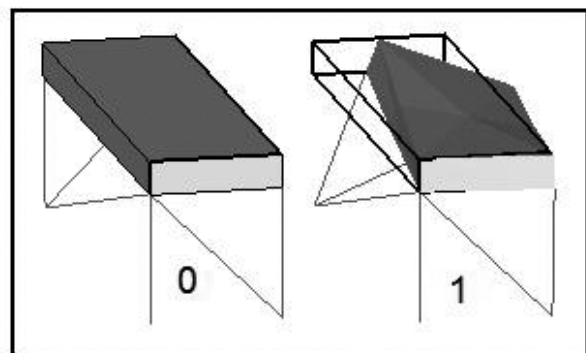
Rysunek 8 prezentuje pierwsze dwa ruchy własne płyty opartej na pięciu prętach – trzech słupkach i dwóch krzyżulcach. Częstości tych ruchów są zawarte w tabeli 1. Tylko pierwszy ruch własny (1) jest wykonywany bez oporu. Pięć użytych do tej pory prętów podporowych ma prawidłowy układ – odebrały one płycie pięć stopni swobody. Do odebrania pozostał tylko ruch (1), w którym tylna krawędź przesuwana się wzdłuż siebie. Ruch ten podpowiada użycie krzyżulca w płaszczyźnie pionowej tylnej ściany konstrukcji. Krzyżulec ten może mieć dwa równoprawne nachylenia( / lub \ ). Do dalszej analizy wybrano krzyżulec (/).



**Ryc. 8.** Spektrum ruchów własnych płyty opartej na pięciu prętach: 0 – badany układ, 1-ruch niesprężysty – ujawnia braki podparcia, 2 - pierwszy ruch sprężysty. Rys. autor

#### Krok 7: płyta oparta na trzech słupkach i trzech krzyżulcach

Rysunek 9 pokazuje pierwszy ruch własny (1) płyty opartej na sześciu prętach – trzech słupkach i trzech krzyżulcach. Częstość tego ruchu podaje tabela 1. Ruch (1) to skręcanie płyty powiązane z wydłużaniem/skracaniem tylnego krzyżulca. Ruch jest sprężystą deformacją, drganiem z niezerową częstością. Spektrum ruchów własnych badanego układu nie zawiera w ogóle ruchów o zerowych częstościach, wykonywanych bez oporu. Z tego powodu płyta oparta na sześciu prętach, w sposób podany na ryc. 9, jest układem w pełni podpartym.



**Ryc. 9.** Spektrum ruchów własnych płyty opartej na sześciu prętach: 0 – badany układ, 1 - pierwszy ruch – deformacja sprężysta. Brak ruchów niesprężystych – układ w pełni podparty. Rys. autor

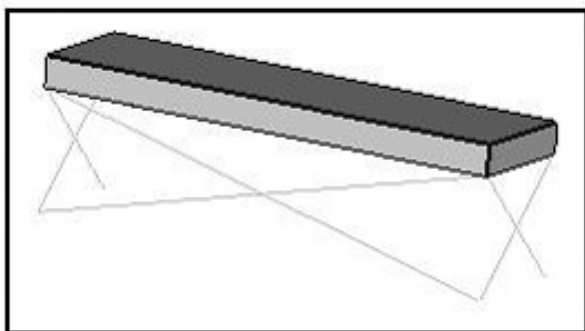
## 5. KONSTRUKCJE ALTERNATYWNE

Pełne podparcie płyty za pomocą mniej niż sześciu prętów nie jest możliwe, gdyż w każdym kroku procesu syntezy dodawany był pręt konieczny, ograniczający konkretne przemieszczenie. Ogólne prawo kinematyki mówi, że ciało swobodne ma w przestrzeni trójwymiarowej sześć stopni swobody.<sup>12</sup> Co ważne, istnieją układy sześciu prętów zapewniające pełne podparcie płyty, inne od układu z ryc. 9. W procesie syntezy pojawiały się liczne alternatywne możliwości dodawania kolejnych prętów. Jako pierwszy pręt został wybrany pionowy słupek, ale może to być dowolny pręt. W drugim kroku (ryc. 4), opisano dziesięć możliwych wariantów użycia drugiego pręta, w postaci słupka lub krzyżulca. W trzecim kroku (ryc. 5), pojawiło się także dziesięć sensownych położeń trzeciego pręta – słupka lub krzyżulca. W kroku czwartym (ryc. 6), opisa-

<sup>12</sup> Degrees of freedom, [http://en.wikipedia.org/wiki/Degrees\\_of\\_freedom\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Degrees_of_freedom_(mechanics)) [dostęp: 04-06-2014].



no sześć prawidłowych zastosowań czwartego pręta, słupka lub krzyżulca. W piątym kroku (ryc. 7), wystąpiły cztery sensowne położenia piątego pręta - krzyżulca lub słupka. W kroku ostatnim (ryc. 8), możliwe były dwa prawidłowe położenia krzyżulca, ostatniego, szóstego pręta. Proces syntezy ma wiele możliwych ścieżek, złożonych z decyzji podejmowanych w kolejnych krokach. Inna ścieżka daje na ogół inny wynik – układ sześciu prętów. Zbiór wszystkich ścieżek (drzewo decyzji projektowych) jest złożony. To zaleta z punktu widzenia projektanta, gdyż oznacza to istnienie wielu rozwiązań zadania syntezy.

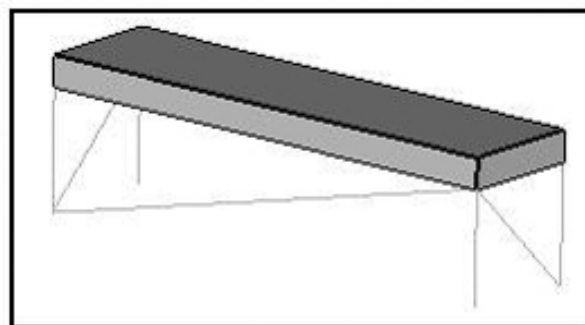


**Ryc. 10.** Układ w pełni podparty na sześciu prętach ukośnych. Rys. autor

Rysunek 10 przedstawia jedno z alternatywnych rozwiązań problemu pełnego podparcia płyty za pomocą sześciu prętów. Wszystkie pręty są tutaj krzyżulcami. Wśród podpór nie ma pionowych słupków. Analiza spektrum drgań własnych tego układu pokazuje, że pierwszy ruch własny jest ruchem z oporem. Jest to więc układ poprawnie podparty.

Podparcie płyty sześcioma prętami może, ale nie musi być podparciem pełnym. Nie każdy układ sześciu prętów eliminuje wszystkie ruchy wykonywane bez oporu; może być konieczne zastosowanie większej liczby prętów. Rysunek 11 przedstawia płytę opartą na siedmiu prętach – czterech słupkach i trzech krzyżulcach.

Zastosowanie czterech pionowych słupków naróżnych jest bardzo częste w praktyce. Spektrum drgań własnych takiej płyty (bez krzyżulców) zawiera trzy ruchy wykonywane bez oporu. Są to ruchy w płaszczyźnie płyty, która 'ślizga' się po powierzchni wyznaczonej przez górne końce słupków. Eliminacja tych trzech ruchów wymaga użycia trzech krzyżulców. Układ w pełni



**Ryc. 11.** Układ w pełni podparty na siedmiu prętach: czterech pionowych i trzech ukośnych. Rys. autor

podparty, mający cztery słupy, wymaga zatem łącznie siedmiu prętów.

Układy skonstruowane powyżej są sztywne przy niewielkiej liczbie prętów. Prostota jest drogą do ekonomii, ekspresji i elegancji.<sup>13</sup> Mając zagwarantowaną sztywność, do każdego z tych układów można swobodnie dodać dowolną liczbę prętów, dowolnie rozmieszczonych. W praktyce często się tak dzieje.<sup>14</sup>

## PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono prostą procedurę iteracyjnego, wizualnego, interaktywnego projektowania sztywnych, przestrzennych konfiguracji ustrojów szkieletowych. Jest to procedura wirtualna, realizowana z użyciem narzędzi geometrycznych i obliczeniowych CAD. Procedura polega na cyklicznym powtarzaniu kroków testowania i rozbudowy. Testowanie to wirtualne potrząsanie, wykorzystujące algorytm analizy drgań własnych. Testowanie wykrywa ewentualne ruchy wykonywane bez oporu, wymagające uzupełnienia konfiguracji projektowanego układu. Rozbudowa polega na dodawaniu prętów w kierunku wykrytych niesztwnych ruchów układu. Proponowana procedura może być zastosowana do syntezy układów dowolnej złożoności. Jest ona szczególnie przydatna w projektowaniu wstępnym, koncepcyjnym, gdy układ nie jest jeszcze kompletny, zdolny do przenoszenia obciążeń. Tradycyjne narzędzia analizy konstrukcji (analiza statyczna) są w takich warunkach bezsilne. Pokazany proces syntezy jest na tyle prosty, bezpośredni i wydajny, że może stanowić wygodne narzędzie wspierające twórcze poszukiwania w interaktywnym projektowaniu architektonicznym.

<sup>13</sup> A. Allen, W. Zalewski, *Form and forces. Designing efficient expressive structures*, Wiley, Hoboken NJ 2010, s. 602.

<sup>14</sup> Ibidem, s. 424.

## LITERATURA

1. **Allen A., Zalewski W. (2010)**, *Form and forces. Designing efficient expressive structures*, Wiley, Hoboken NJ.
2. **Salvadori M. (1990)**, *Why buildings stand up*, W.W. Norton & Company, New York.

## ŹRÓDŁA INTERNETOWE

1. *Calculix*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Calculix> [dostęp: 04-06-2014].

2. *Computer aided design*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Computer-aided\\_design](http://en.wikipedia.org/wiki/Computer-aided_design) [dostęp: 04-06-2014].
3. *Degrees of freedom*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Degrees\\_of\\_freedom\\_\(mechanics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Degrees_of_freedom_(mechanics)) [dostęp: 04-06-2014].
4. *Finite element method*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_element\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method) [dostęp: 04-06-2014].
5. *Vibration*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Vibration> [dostęp: 04-06-2014].

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego S/WA/1/11 Politechniki Białostockiej.

Autor wyraża podziękowanie anonimowemu recenzentowi za uwagi, które umożliwiły wyklarowanie celu pracy i znaczenia jej wyników.